

Antenas

Antenas es un problema en dónde se esperaba una solución de aproximación o alguna heurística que buscara optimizar lo más posible un resultado. Antenas es una variante de un problema **NP-completo** conocido *minimum cardinality set cover* que se formula de la siguiente manera:

- Dado un universo U de n elementos y una colección de subconjuntos de U , $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, encuentra una subcolección de cardinalidad mínima S que contenga a todos los elementos de U .

Es decir, dados n elementos y una colección de conjuntos de esos elementos, encuentra cual es el mínimo número de conjuntos que debes tomar para que los n elementos aparezcan en al menos uno de los conjuntos.

En el caso de antenas, se pueden tomar las n casillas no cubiertas de la ciudad como los elementos de U y todos los lugares posibles para poner una antena como los conjuntos de S donde cada conjunto incluye a los elementos que alcanza según su cobertura. Si se puede resolver el *minimum cardinality set cover* entonces tendremos una solución óptima para antenas.

Antenas es un caso particular, ya que la cardinalidad de los S conjuntos es fija y más aún, la distancia entre los elementos de un mismo conjunto S_i está limitada por una constante. Estas características hacen que obtener un buen factor de aproximación sea más sencillo que en el caso genérico del problema. De hecho la variante en la que la cardinalidad de cada conjunto en S está limitada por una constante k se conoce como *minimum k-set cover* y cae dentro de la familia de los problemas **APX**, esto es, se puede demostrar que hay un algoritmo ejecutable en tiempo polinomial para encontrar una aproximación a la solución óptima cuyo factor está limitado por una constante. Hay una gran información en internet sobre cualquiera de estos temas si el lector desea ahondar en cualquiera de ellos.

No esperamos que ningún alumno tenga conocimientos profundos de complejidad computacional, problemas **NP**, problemas **APX**, algoritmos de aproximación o cuestiones similares en la fase nacional de la Olimpiada. Por esta razón se decidió optar por poner instancias pequeñas del problema y calificar a los alumnos comparando su resultado con los resultados de otros alumnos y con una heurística del propio comité. A continuación expongo varias ideas sencillas y los resultados aproximados que cada una hubiera obtenido.

Heurística 1. Pon la antena en el primer lugar que puedas.

Esta heurística es la más simple. Lee el mapa de la ciudad, coloca las antenas iniciales, y posteriormente ve recorriendo la ciudad cuadro por cuadro, si encuentras un cuadro vacío, pon ahí una antena y marca como cubiertos los cuadros vacíos que caen dentro de la cobertura de la antena.

Esta solución hubiera obtenido 37 puntos.

Heurística 2. Pon la esquina superior de la antena en el primer lugar que puedas

Queda claro que la heurística uno desperdicia bastante área de cobertura de cada antena, ya que estamos recorriendo la ciudad de arriba abajo, de izquierda a derecha, cuando ponemos la antena centrada en el primer cuadro vacío estamos desperdiciando al menos la mitad superior del área de cobertura de la antena y en muchos casos la mitad izquierda de la mitad inferior, es decir estamos utilizando en la mayoría de las veces solo la cuarta parte de la cobertura de la antena.

La segunda heurística entonces es, cada que se encuentre un cuadro vacío, se coloca una antena de modo que la esquina superior izquierda del área de cobertura de la antena quede en el cuadro vacío.

Esta simple heurística hubiera obtenido 90 puntos.

Heurística 3. Busca la mejor columna para colocar la antena

Optimizando aún más la idea de la primera heurística tenemos que al haber puesto la esquina superior izquierda del área de cobertura de la antena en el primer cuadro vacío, dejamos de desperdiciar el área superior de la cobertura, sin embargo, es posible que dejemos un cuadro vacío que estuviera en el cuadrante inferior izquierdo sin cubrir obligándonos a poner una antena más posteriormente.

La tercera heurística busca el primer cuadro vacío, una vez que lo encuentra en vez de poner la esquina superior izquierda del área de cobertura en ese cuadro, prueba poner la antena en todas las columnas posibles, es decir pone la esquina superior izquierda del área en el cuadro y luego va “recorriendo” la antena hacia la izquierda hasta que la esquina superior derecha de la antena está en el cuadro. Para cada posible colocación guarda cuantos cuadros vacíos cubrió y al final se queda con la posición que cubre más cuadros y deja la antena más hacia la derecha.

Esta heurística hubiera obtenido 99.31 puntos.

Esta heurística fue la que se utilizó como heurística del comité.

Existen muchas otras líneas para seguir en cuanto a heurísticas para este problema, también existen métodos para asegurar el factor de aproximación que siguen siendo polinomiales. La idea principal de este problema era que los alumnos *perdieran el miedo* a probar ideas. Agrego dos heurísticas más que continúan la optimización de la idea original. Queda como ejercicio para el lector buscar ideas distintas de aproximación al problema.

Heurística 4. ¿Porqué quedarse a la derecha?

En la heurística 3 buscamos la mejor posición para colocar la antena y de entre las mejores posiciones que nos daban el mismo máximo tomamos la que estaba más a la derecha. La pregunta entonces es ¿Realmente es lo mejor quedarse a la derecha? ¿Qué sucede si nos quedamos a la izquierda?

Si se modifica el programa para que deje la antena lo más a la izquierda posible, se ejecuta con algunos casos de prueba aleatorios y se comparan los resultados con los obtenidos cuando se deja la antena a la derecha, se observa que los resultados varían. Hay casos en los que se obtiene un

mejor resultado dejándola a la derecha y casos en los que se obtiene un mejor resultado dejándola a la izquierda.

La heurística 4 prueba ambas opciones. Resuelve el problema dejando las antenas lo más a la derecha posible y guarda el resultado. Posteriormente lo resuelve dejando las antenas lo más a la izquierda. Compara ambos resultados y entrega el mejor de los dos.

Esta heurística hubiera obtenido 99.65 puntos y hubiera hecho bajar el puntaje del resto de las soluciones en 6 casos, ya que para estos encuentra una solución mejor que todas las anteriormente encontradas.

Heurística 5. ¿Porqué quedarse en algún lado en específico?

Cuando se está haciendo una heurística de aproximación, es muy importante exprimir al máximo todas las propiedades observadas del problema. Ya hemos visto que hay casos para los que es mejor quedarse a la derecha y casos para los que es mejor quedarse a la izquierda. Pero, porque quedarse siempre del mismo lado, dentro de la misma instancia de un problema debe haber situaciones en las que la mejor opción era la derecha y situaciones en las que la mejor opción era la izquierda.

La heurística 5 extiende la heurística 4 (es importante notar como hemos ido extendiendo la idea inicial de modo que cada nueva heurística nos asegura un resultado, al menos tan bueno como el anterior) calculando, además del caso con todas las antenas a la izquierda o todas a la derecha, varios casos en los que antena por antena se decide de manera aleatoria si se deja a la izquierda o a la derecha.

Las reglas de las olimpiadas internacionales requieren que un programa sea determinista, es decir, que para una cierta entrada, entregue siempre la misma salida. Por lo anterior, cuando se desea utilizar algoritmos aleatorios

es necesario inicializar la semilla a un número constante, de modo que la secuencia de números aleatorios sea siempre la misma. Evaluando la complejidad de la solución y por motivos del bicentenario de México, decidí correr la heurística 5 con semillas iniciales que van desde el 1810 hasta el 2010 😊 .

Esta heurística hubiera obtenido 99.7 puntos, sólo es derrotada en 2 casos, en ambos por la diferencia mínima y encuentra soluciones mejores a todas las conocidas en 12 de los 25 casos de prueba, en algunos de ellos por un margen amplio.