

## El problema de resolver un problema

En los años que llevo dentro del comité científico de la Olimpiada de Informática muchas veces se ha acercado a mi algún alumno o maestro con la siguiente pregunta: “¿Qué se necesita saber para poder resolver un problema de olimpiada?”

La pregunta, claro, suena lógica, incluso indispensable, ¿Qué otra cosa tiene más sentido preguntar cuando vamos a resolver un examen que el temario del mismo? ¿Qué hace cualquier estudiante el día previo a su evaluación final sino repasar los apuntes de su clase? ¿Qué mejor forma de obtener una buena calificación que resolver algunos reactivos similares a los del examen con el fin de practicar? ¿Qué mejor forma de asegurar un buen lugar en la Olimpiada, que dominar los temas de los problemas?

Sin embargo, a pesar de que la considero la mejor posible, mi respuesta a dicha pregunta parece nunca dejarlos satisfechos, de hecho en la junta de líderes de la 4ta OMI hubo un gran debate sobre la misma. Mi respuesta a la pregunta en cuestión es: “LO QUE UN ALUMNO NECESITA SABER PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE OLIMPIADA, ES SABER PROGRAMAR, ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS DE ALGEBRA Y SOBRE TODO TIENE QUE SABER COMO RESOLVER UN PROBLEMA.”

¿Cómo voy a saber si puedo resolver un problema, si no se de lo que se trata? ¿Y qué tiene que ver? Nuestros métodos educativos nos han acostumbrado a un cierto esquema. El maestro imparte una clase y luego da tarea sobre el tema que se expuso. Por ejemplo, se da una clase de ecuaciones cuadráticas y después se pone el siguiente ejercicio.

*“Un granjero tiene un rancho rectangular con un perímetro de 110 metros y un área de 700 metros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del rancho?”*

El estudiante *sabe* que para resolver éste problema tiene que usar ecuaciones cuadráticas, *¿Por qué otra razón lo pondrían como tarea de esa clase?* Tarde o temprano plantea las siguientes dos ecuaciones.

$$2x + 2y = 110$$

$$xy = 700$$

las que a su vez conducen a la ecuación cuadrática

$$x(55 - x) = 700$$

la cual es resuelta usando algunas fórmulas vistas en clase, el alumno puede fácilmente despejar  $x$  y resolver el problema.

En alguna otra clase sobre geometría se discuten las propiedades de un triángulo. Se explica el teorema de Pitágoras y se concluye de nuevo con otra serie de problemas para resolver. El alumno, por supuesto, no tiene ninguna duda de que para resolver dichos problemas es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

César Arturo Cepeda García

México DF, 15 enero 2003

Sin embargo, se antoja que esa no es la manera correcta de enseñar. **La relación entre un problema y un método debería ser discutida desde la perspectiva del problema, no del método.**

La dificultad a la que se enfrentan las personas cuando quieren resolver un problema del mundo real, la mayor parte de las veces no es la falta de conocimientos, el verdadero problema es que en la mayoría de los casos la persona no tiene ni la mas mínima idea de cual conocimiento debe aplicar. Porque desgraciadamente los problemas de la vida real, igual que los de la Olimpiada, no aparecen en el final del capítulo de un libro.

Con lo que volvemos a mi respuesta para la pregunta original. Para poder resolver eficientemente problemas de olimpiada, es necesario tener más que simple conocimiento de algoritmos. Se requiere una devoción a determinar la mejor combinación de acercamientos al objetivo que se desea alcanzar dentro del tiempo disponible. Reconocer la complejidad real de un problema es un prerequisite para su solución. Es importante entender que un problema representa una diferencia entre el estado actual y el estado deseado. Si no tienes un objetivo definido, entonces no tienes un problema. Puedes tener una lista de datos y no importa cuantas operaciones realices con ellos nunca resolverás ningún problema, ya que no tienes ningún objetivo. No hay nada que resolver.

Resolver problemas de programación es un arte, y desgraciadamente es un arte caído en el olvido. En la actualidad resulta mucho mas fácil obtener un componente o alguna rutina de Internet que resuelva un problema parecido al que nos enfrentamos que pensar en una solución adecuada. Sin embargo, comúnmente en un intento por utilizar un algoritmo conocido, cambiamos el objetivo a alcanzar simplemente para lograr que nuestro algoritmo encaje en el problema. Es como si armado con un martillo, y queriendo atornillar una pija a una tabla, golpeáramos la pija con el martillo hasta hacerla entrar. Aún cuando lográramos hacerla entrar nunca mas se podría destornillar. *Armado con un martillo todo parece un clavo.*

Desgraciadamente, identificar el método o técnica a utilizar en un problema específico dista mucho de ser una tarea trivial. Si fuera fácil o hubiera una serie de pasos definidos para hacerlo, no sería un problema. Sin embargo, aunque no existe el decálogo del programador si hay una serie de recomendaciones útiles a la hora de decidir como enfrentar cualquier problema.

### ¿Porqué algunos problemas son difíciles de resolver?

Si conocemos algunas de las razones principales que hacen que comúnmente un problema sea difícil de resolver, entonces tal vez podamos evitar caer en esas trampas. La mayoría de los problemas son difíciles de resolver por una o varias de las siguientes razones:

- El número de soluciones posibles en el espacio de búsqueda es tan grande que prohíbe una búsqueda exhaustiva por la mejor solución.
- El problema en si mismo es tan complicado que para poder facilitar cualquier respuesta tenemos que usar un modelo tan simplificado del problema que cualquier solución resulta esencialmente inútil.

César Arturo Cepeda García

México DF, 15 enero 2003

- La función de evaluación que describe la calidad de una solución posible es ruidosa o varía con el tiempo.
- Las soluciones válidas tienen que cumplir tantas restricciones que el simple hecho de encontrar una solución válida cualquiera resulta difícil.
- La persona que está resolviendo el problema no está suficientemente preparada o tiene alguna barrera psicológica que le impide descubrir la solución.

Naturalmente, esta lista podría extenderse para incluir otros obstáculos, sin embargo, para empezar, estos son más que suficientes. Cada uno de estos puntos es un problema en sí mismo. Para poder resolver un problema es necesario entender el problema, así es que a continuación discutiremos brevemente cada uno de estos puntos.

### El tamaño del espacio de búsqueda.

Para empezar, que es un espacio de búsqueda. El espacio de búsqueda es el conjunto que contiene todas las posibles representaciones de solución de un problema.

Tomemos para ejemplo dos problemas clásicos. *El problema de satisfactibilidad Booleana (SAT)* y el *Problema del agente viajero (TSP)*.

El problema de satisfactibilidad Booleana (SAT) consiste en asignar valores de verdadero o falso a las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de modo que una cierta ecuación Booleana  $F(\mathbf{x})$  evalúe a verdadero. Consideremos el siguiente problema de 100 variables:

$$F(X) = (x_{17} \vee \overline{x_{37}} \vee x_{73}) \wedge (x_{11} \vee \overline{x_{56}}) \wedge \dots \wedge (x_2 \vee x_{43} \vee \overline{x_{77}} \vee \overline{x_{97}})$$

¿Cuál es el espacio de búsqueda en este problema? En realidad, el espacio de búsqueda, contiene todas las posibles representaciones de solución, por lo que el tamaño del espacio de búsqueda depende no tanto del problema sino de la manera que se seleccione para representar una posible solución. En este caso por ejemplo, cada variable puede tomar dos valores VERDADERO o FALSO. Nosotros podríamos decidir representar estos valores como VERDADERO = 1, FALSO = 0. Y crear una cadena de 100 números (1 ó 0) donde el número  $i$  representa el valor de la variable  $x_i$ . El espacio de búsqueda contiene todas las representaciones posibles, es decir todas las cadenas de 100 (0's o 1's) posibles, la cardinalidad de este conjunto es por tanto  $|S| = 2^{100} \approx 10^{30}$ .

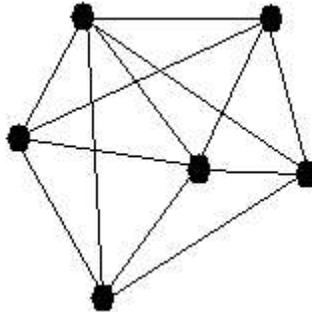
¡Este es número muy grande! Tratar de buscar una solución correcta entre todas estas está completamente fuera de cualquier posibilidad. Suponiendo que tuvieramos una computadora capaz de comprobar 1000 de estas cadenas cada segundo y suponiendo que hubiéramos empezado a usar dicha computadora en el inicio del tiempo, es decir hace 15,000,000,000 de años, justo durante el Big Bang, al día de hoy no habríamos terminado de analizar ni siquiera el uno por ciento de todo el espacio de búsqueda.

Lo que es peor, no es trivial encontrar una función de evaluación que nos indique "que tan buena" es una solución, ya que para cualquier cadena, si al evaluarla obtenemos verdadero, entonces resolvimos el problema, pero si obtenemos falso, no hay forma de saber que tan cerca estamos de una solución correcta. Hay algunos otros problemas que se antojan más fáciles que SAT debido a que tienen una función de evaluación natural, que permite saber que tan buena es una solución dada. Tal es el caso de nuestro segundo problema de ejemplo.

César Arturo Cepeda García

México DF, 15 enero 2003

El problema del Agente Viajero es el siguiente: Se tiene una lista de ciudades y un agente viajero. El agente inicia su recorrido desde una ciudad arbitraria y debe visitar todas y cada una de las ciudades en la lista, visitando cada ciudad únicamente una vez y volviendo al final del recorrido a la ciudad inicial. El objetivo del problema es encontrar el recorrido tal que el costo del viaje sea el mínimo posible. Por costo del viaje se entiende la suma de los costos de viajar de una ciudad a otra. Aquí, dependiendo del planteamiento del problema, el costo puede ser la distancia física entre ciudades, o puede estar dada por una combinación de factores externos como, tráfico, calidad de la carretera, horarios de accesibilidad, etc.



TSP con 6 ciudades

De nuevo, antes de cualquier cosa es necesario dimensionar el espacio de búsqueda. Como habíamos dicho antes, el espacio de búsqueda depende de nuestra representación de la solución, por lo que primero es necesario decidir la manera en la que vamos a representar una solución.

Noten que el problema puede tener muchas variantes diferentes, por ejemplo, puede ser que no cueste lo mismo ir de  $i$  a  $j$  que ir de  $j$  a  $i$ . En este caso estaríamos frente a un TSP asimétrico. O puede ser que estando en la ciudad  $x$  no sea posible ir a la ciudad  $y$ , ya que no existe un camino entre estas dos ciudades. Así pueden pensarse muchas otras variantes. Para este ejercicio, sin embargo, consideremos un TSP simétrico en el que todas las ciudades tienen caminos a todas las demás ciudades. Para dicho caso una posible representación de solución es una permutación de los números 1 al  $N$  donde cada número representa a una ciudad en el mapa.

Teniendo la representación de la solución es posible dimensionar el espacio de búsqueda. Si se tienen  $N$  ciudades, el número de permutaciones posibles es de  $n!$ , sin embargo, como el recorrido es cíclico (se vuelve a la ciudad en la que se empezó), las dos siguientes soluciones son iguales,

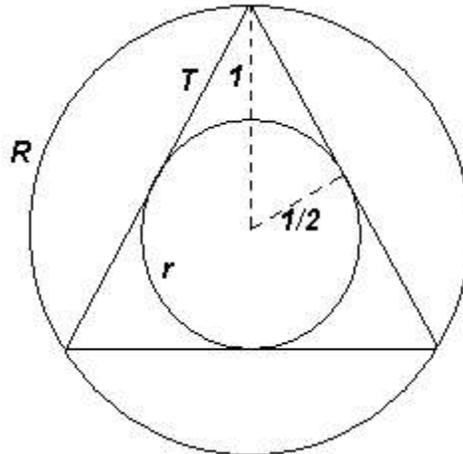
$$1 - 5 - 8 - 2 - \dots - 34$$

$$5 - 8 - 2 - \dots - 34 - 1$$

como el TSP es simétrico, cada solución se puede representar de  $2n$  formas diferentes, lo que nos deja con un espacio de búsqueda de

$$\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$$



Círculo  $R$ , Triángulo equilátero  $T$  y círculo inscrito  $r$ 

## MODELO 1.

Sabemos que la longitud  $l$  de la cuerda puede variar de 0 a 2, ya que 2 es el diámetro del círculo  $R$ . Consideremos el punto medio de la línea  $m$ . Si  $m$  está dentro de  $r$  entonces  $l \geq \sqrt{3}$ , si  $m$  está dentro de  $R$  pero no en el interior de  $r$  entonces  $l < \sqrt{3}$ . Como el punto medio  $m$  puede estar en cualquier lugar dentro de  $R$ , la probabilidad de que caiga dentro de  $r$  está determinada por la razón del área entre  $r$  y  $R$ . Por lo tanto

$$p = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi(1)^2} = \frac{1}{4}$$

## MODELO 2.

Tracemos un diámetro arbitrario en  $R$ , posteriormente, giremos  $R$  para que el diámetro trazado y  $L$  sean perpendiculares. Ahora sólo es necesario observar la mitad del círculo debido a que la longitud de la cuerda debe ser menor o igual al diámetro de  $R$ . El punto medio de la cuerda puede estar a menos de 0.5 del centro de  $R$  o no. Si está a menos de 0.5 del centro entonces su longitud es mayor o igual a  $\sqrt{3}$ . De otra forma es menor a  $\sqrt{3}$ . Por lo tanto la probabilidad puede ser determinada por la razón entre los diámetros de  $r$  y  $R$ .

$$p = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

## MODELO 3

Tomemos un punto fijo arbitrario  $A$  en la circunferencia de  $R$ . Posteriormente podemos girar el círculo  $R$  hasta que el punto  $A$  pertenezca a la línea  $L$ . Ahora tracemos una línea  $L_1$  que sea tangente a  $R$  en el punto  $A$ . Se puede observar que el ángulo  $\gamma$  entre las

líneas  $L$  y  $L_1$  nos puede determinar la probabilidad. Si  $\frac{\pi}{3} \leq \gamma \leq \frac{2\pi}{3}$  entonces el punto

medio estará dentro de  $r$  lo que nos da una longitud  $l \geq \sqrt{3}$ . Por el otro lado si  $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{3}$

ó  $\frac{2\pi}{3} < \gamma \leq \pi$  entonces  $l < \sqrt{3}$ . Debido a que hay  $\pi$  posibles radianes y que un tercio de ellos nos dan la longitud deseada, entonces la probabilidad esta dada por

$$p = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{1}{3}$$

¿Cuál de estos tres modelos es correcto? Pareciera que los tres casos son razonables y las tres soluciones halladas para  $p$  tienen sentido, sin embargo todas son diferentes.

La razón de la variación depende de que cada modelo hace suposiciones diferentes sobre como se trazó la línea infinita. La suposición en el primer modelo fue la de que el punto medio de la línea podía caer en cualquier parte del círculo sin que ningún punto o región tuviera mejor probabilidad que cualquier otro. Trata de hacer explícitas las suposiciones para el segundo y tercer modelo y te darás cuenta de porque difieren los resultados.

Es importante por tanto, fijarse bien en el modelo del problema, ya que una suposición implícita puede llevar a resultados drásticamente diferentes. Imaginen la cantidad de problemas que esto puede acarrear en una situación mas complicada.

### La función de evaluación varía con el tiempo.

La función de evaluación es la que nos permite saber si una solución es válida o que tan “buena” es esa solución comparada con otra. En un caso general la función de evaluación toma como argumento una posible solución y devuelve un valor numérico que indica que tan cerca se esta de la solución óptima. Resulta obvio que una función de evaluación correcta debe devolver el máximo valor, cuando la solución para el modelo es la óptima.

Hay problemas que presentan una función de evaluación natural, como el caso del TSP, en este problema, para evaluar la “calidad” de la solución basta con sumar los costos del recorrido, la solución óptima es la que tiene menor costo y la peor solución es la de mayor costo. Sin embargo no siempre resulta tan sencillo obtener una función de evaluación. Por ejemplo en el caso de SAT, al evaluar la expresión booleana con una serie de valores, simplemente se obtiene un resultado VERDADERO o FALSO, pero esto no nos indica que tan “buena” es la solución, o que tan cerca esta de ser óptima, puede ser que con sólo cambiar el valor de una variable nuestra expresión evalúe a VERDADERO o puede ser que sea necesario cambiar 50 valores, la función de evaluación no nos dice nada.

César Arturo Cepeda García

México DF, 15 enero 2003

Por si el hecho de encontrar una buena función de evaluación no fuera suficiente problema, hay veces que la función de evaluación varia en el tiempo. Supongamos por ejemplo el caso de que el agente viajero en TSP tuviera que pasar por la ciudad de México, y el carro del agente no puede circular ese día debido al programa "hoy no circula". Tomando en cuenta esta restricción, el agente sólo puede visitar la ciudad de México entre las 10 pm y las 5 am, lo que obliga a que nuestra función de evaluación varíe en el tiempo, ya que entre las 5am y 10pm cualquier recorrido que pase por la ciudad de México debería dar un costo de recorrido infinito, sin embargo, si es después de las 10pm, el costo sería el normal.

Es muy importante el poder visualizar cual es la mejor función de evaluación buscando que esta sea correcta y de la máxima información posible acerca de la solución.

### **El problema de demostrar cosas.**

Aunque podría parecer extraño, en nuestro intento por resolver problemas, muchas veces los hacemos más difíciles de lo que en realidad son. Existe un fenómeno entre las personas, el cuál hace, que si le pides a alguien que *encuentre* la solución a un problema, la hallarán mucho más sencillo que si les pides que *demuestren* algo acerca de la solución. Aún cuando ambas tareas resultan iguales desde un punto de vista matemático.

Por ejemplo, piensa en cualquier problema matemático con un cierto grado de dificultad. La tarea del problema podría ser encontrar un cierto valor, puede ser la altura de un edificio, la distancia entre dos puntos, etc. Por ejemplo el siguiente problema. Te toma 4 horas llenar una alberca usando una tubería ancha, y 6 horas llenar la misma alberca con una tubería delgada. ¿Cuántas horas tardarías si usarás ambas tuberías? Como el problema esta formulado en el sentido de "Encuentra el valor de  $x$ " resulta sencillo de resolver, pero por alguna razón si se cambia la formulación del problema a: demuestra que el tiempo requerido para llenar la alberca usando ambas tuberías es menor a 2 horas con 25 minutos, menos personas serán capaces de resolverlo. Aún a pesar del hecho de que el problema no cambio en lo absoluto.

Una posible razón de la aversión a hacer demostraciones es que la mayoría de las personas no tiene experiencia en demostrar cosas y no tiene idea de cómo empezar.

Mostrar las cosas no es más difícil que resolverlas y no debes amedrentarte por el hecho de analizar matemáticamente un problema o de demostrar alguna característica del mismo. Mientras mejor comprendas el problema te será más sencillo encontrar una solución.